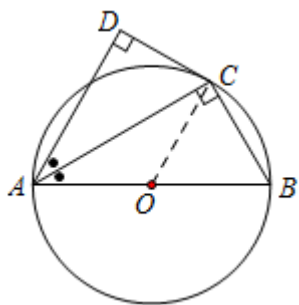


相似三角形进阶二

一、相似与圆综合

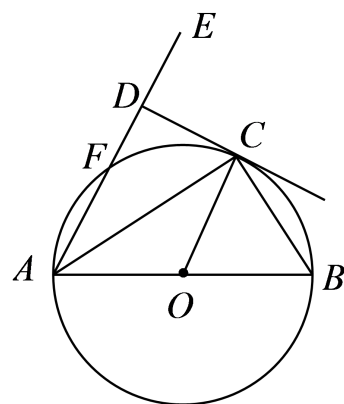
1. AA普通相似

AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 平分 $\angle BAD$ ， $CD \perp AD$ 于 D 。



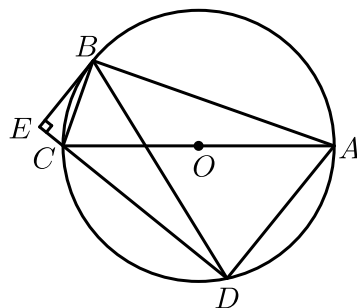
例题

1. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， AE 交 $\odot O$ 于点 F ，且与 $\odot O$ 的切线 CD 互相垂直，垂足为 D 。



- (1) 求证： $\angle EAC = \angle CAB$;
- (2) 若 $CD = 4$ ， $AD = 8$ ，求 $\odot O$ 的半径。

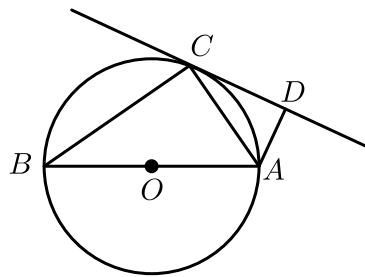
2. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\odot O$ 的切线 BE 交 DC 的延长线于点 E ， $BE \perp CE$



- (1) 求证： $BD = BA$.
 (2) 若 $BC = 3$ ， $\odot O$ 的半径为 $\frac{9}{2}$ ，求线段 CD 的长度 .

练习

3. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上一点， $\angle ACD = \angle B$ ， $AD \perp CD$.



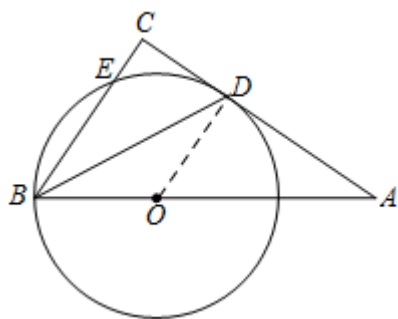
- (1) 求证： CD 是 $\odot O$ 的切线 .
 (2) 若 $AD = 1$ ， $OA = 2$ ，求 AC 的值 .

2. 共角、等角型 (A字、8字型)

 平行出相似

 角平分线+等腰出平行

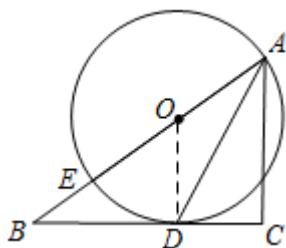
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 点 O 在 AB 上, $\odot O$ 经过 B, D 两点, 交 BC 于点 E .



$OD \parallel BC$, _____.

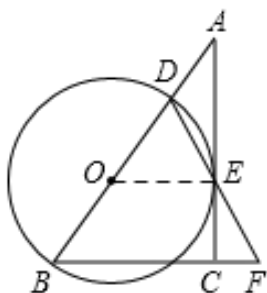
 切线性质证平行

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 E 在 AB 上, 以 AE 为直径的 $\odot O$ 切 BC 于点 D , 连接 AD .



$OD \parallel AC$, _____.

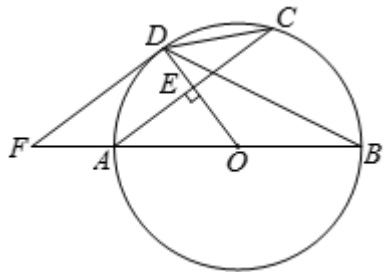
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 上一点, 以 BD 为直径的 $\odot O$ 与边 AC 相切于点 E , 连结 DE 并延长交 BC 的延长线于点 F .



$OE \parallel BF$, _____,
_____.

 倒角证平行

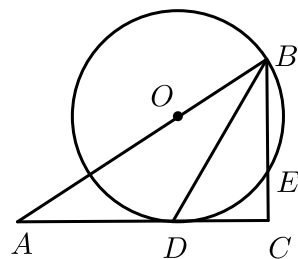
AB 是 $\odot O$ 的直径，半径 OD 垂直弦 AC 于点 E ， F 是 BA 延长线上一点， $\angle CDB = \angle BFD$ 。



$AC \parallel DF$ ，_____。

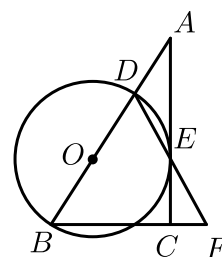
 例题

4. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， BD 是角平分线，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心， OB 为半径的圆经过点 D ，交 BC 于点 E 。



- (1) 求证： AC 是 $\odot O$ 的切线。
 (2) 若 $OB = 10$ ， $CD = 8$ ，求 BE 的长。

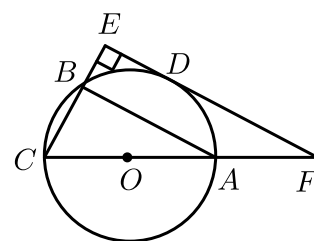
5. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 边上的一点, 以 BD 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于点 E , 连结 DE 并延长, 与 BC 的延长线交于点 F . 且 $BD = BF$.



- (1) 求证: AC 与 $\odot O$ 相切 .
 (2) 若 $BC = 6$, $AB = 12$, 求 $\odot O$ 的面积 .

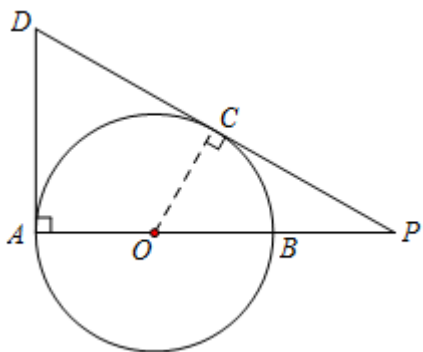
练习

6. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AC 是 $\odot O$ 的直径, D 是 $\widehat{AB}$ 的中点, 过点 D 作直线 BC 的垂线, 分别交 CB 、 CA 的延长线于点 E 、 F .



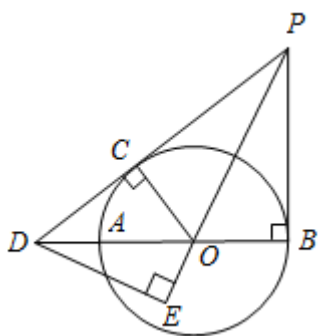
- (1) 求证: EF 是 $\odot O$ 的切线 .
 (2) 若 $EF = 8$, $EC = 6$, 求 $\odot O$ 的半径 .

AB 是 $\odot O$ 的直径， DA 、 DC 是 $\odot O$ 的两条切线， DC 延长线交 AB 延长线于点 P 。



_____.

AB 为 $\odot O$ 的直径， PB 、 PC 是 $\odot O$ 的切线，延长 PC 与 BA 的延长线交于点 D ， $DE \perp PO$ 交 PO 延长线于点 E 。

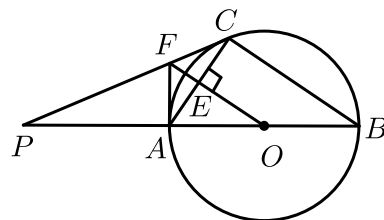


$\triangle PBO \cong \triangle PCO$, _____ ,

_____.

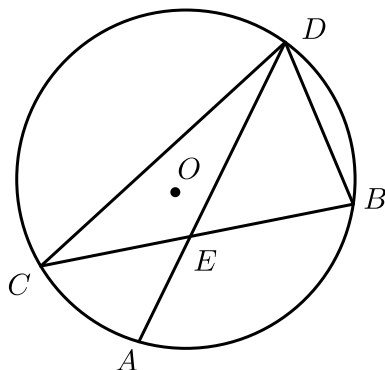
|| 例题

7. 如图, C 是以 AB 为直径的 $\odot O$ 上一点, 过 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E , 过点 A 作 $\odot O$ 的切线交 OE 的延长线于点 F , 连接 CF 并延长交 BA 的延长线于点 P .



- (1) 求证: PC 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 若 $AF = 1$, $OA = 2\sqrt{2}$, 求 PC 的长.

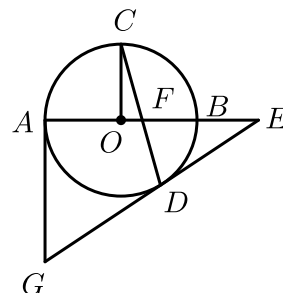
8. 如图, A 、 B 、 C 、 D 四点在 $\odot O$ 上, $AE = 3$, $BE = 4$, $DE = 5$.



- (1) 求证: $\triangle ACE \sim \triangle BDE$.
 (2) 求 CE 的长.

练习

9. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, C 是 $\odot O$ 上一点, $CO \perp AB$ 于点 O , 弦 CD 与 AB 交于点 F , 过点 D 作 $\angle CDE$, 使 $\angle CDE = \angle DFE$, 交 AB 的延长线于点 E . 过点 A 作 $\odot O$ 的切线交 ED 的延长线于点 G .

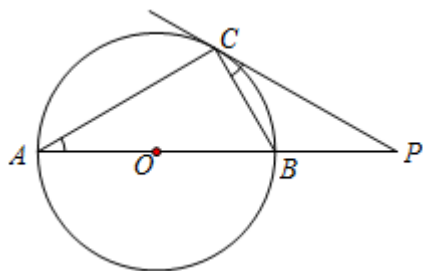


- (1) 求证: GE 是 $\odot O$ 的切线.
 (2) 若 $OF:OB = 1:3$, $\odot O$ 的半径为 3, 求 AG 的长.

3. 共角共边、等角等边型 (子母型)

 弦切角引出子母相似

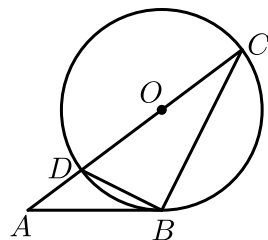
AB 是 $\odot O$ 的直径, PC 是 $\odot O$ 的切线, $\angle A = \angle PCB$.



_____ , _____
 _____ .

|| 例题

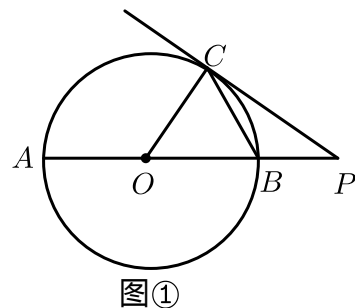
10. 如图， DC 是 $\odot O$ 的直径，点 B 在圆上，直线 AB 交 CD 延长线于点 A ，且 $\angle ABD = \angle C$ 。



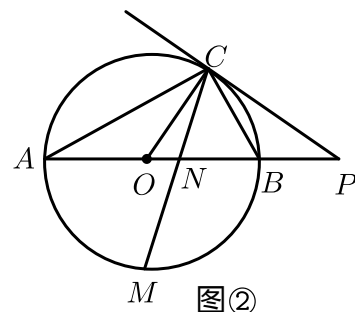
- (1) 求证： AB 是 $\odot O$ 的切线。
 (2) 若 $AB = 4$ ， $AD = 2$ ，求 CD 的长。

11. 已知， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上，过点 C 的直线与 AB 的延长线交于点 P 。

- (1) 如图①，若 $\angle COB = 2\angle PCB$ ，求证：直线 PC 是 $\odot O$ 的切线。

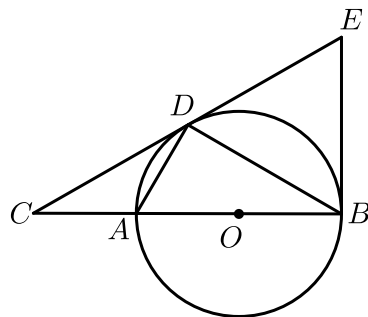


- (2) 如图②，若点 M 是 $\widehat{AB}$ 的中点， CM 交 AB 于点 N ， $MN \cdot MC = 36$ ，求 BM 的值。



练习

12. 如图， D 为 $\odot O$ 上一点，点 C 在直径 BA 的延长线上，且 $\angle CDA = \angle CBD$ 。



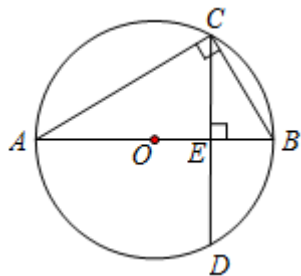
(1) 求证： CD 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 CD 的延长线于点 E ， $BC = 6$ ， $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ 。求 BE 的长。

双垂直模型

直径引出的双垂直相似

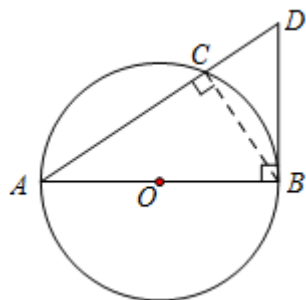
AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 是 $\odot O$ 一条弦，且 $CD \perp AB$ 于点 E 。



_____，
 $AC^2 = AE \cdot AB$ ，_____，
 _____。

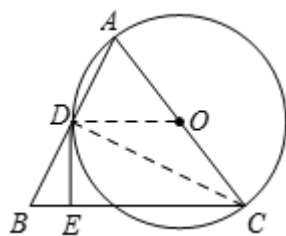
切线与直径引出的双垂直相似

AB 是 $\odot O$ 的直径， BD 是 $\odot O$ 的切线，连接 AD 交 $\odot O$ 于点 C 。



_____，
 $AB^2 = AC \cdot AD$ ，_____，
 _____。

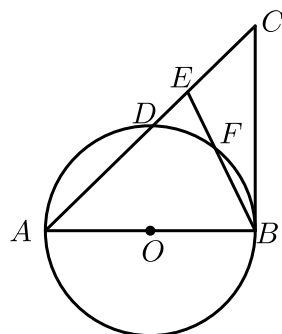
在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ，以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D ， DE 是 $\odot O$ 的切线。



_____，
 $\triangle ADO \sim \triangle ABC$ 。

例题

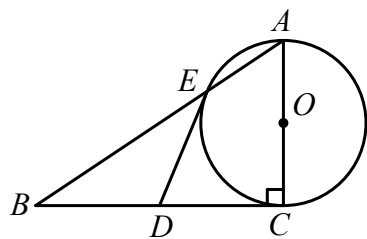
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， E 是 AC 边上的一点，且 $AE = AB$ ， $\angle BAC = 2\angle CBE$ ，以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 AC 于点 D ，交 BE 于点 F 。



- (1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线。
 (2) 若 $AB = 8$ ， $BC = 6$ ，求 DE 的长。

练习

14. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， D 为 BC 的中点，以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 E 。

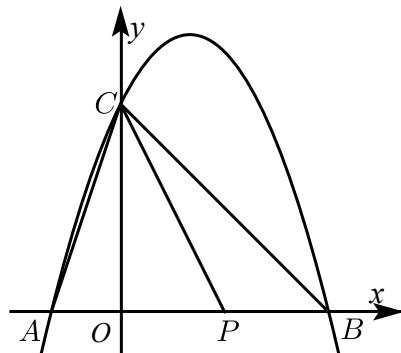


- (1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线。
 (2) 若 $AE : EB = 1 : 2$ ， $BC = 6$ ，求 AE 的长。

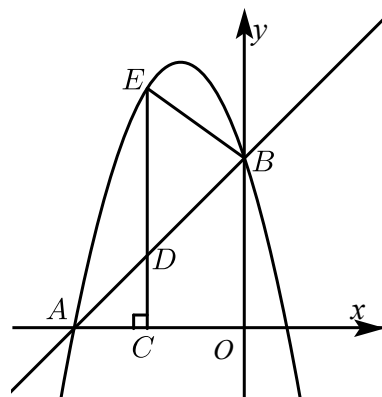
二、相似与二次函数综合

例题

15. 如图，抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，点 P 为线段 AB 上一点（不与点 A 、 B 重合），那么是否存在一点 P ，使得 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ABC$ 相似，若存在，请求出点 P 坐标；若不存在，请说明理由。

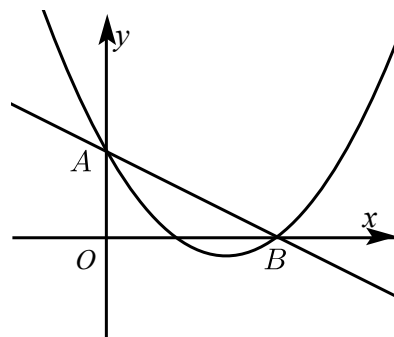


16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x + 4$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过 A 、 B 两点，点 D 为线段 AB 上一动点，过点 D 作 $CD \perp x$ 轴于点 C ，交抛物线于点 E 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 求 $\triangle ABE$ 面积的最大值。
- (3) 连接 BE ，是否存在点 D ，使得 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似？若存在，求出点 D 坐标。若不存在，说明理由。

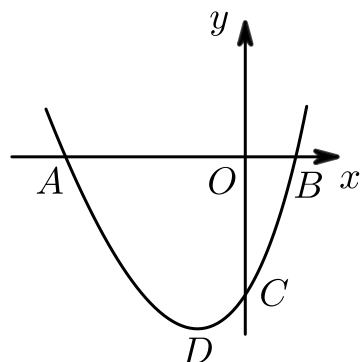
17. 如图，已知抛物线 $y = \frac{5}{8}x^2 + bx + c$ 经过直线 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 与坐标轴的两个交点 A 、 B ，点 C 为抛物线上的一点，且 $\angle ABC = 90^\circ$ 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 求点 C 坐标。
- (3) 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 上是否存在点 P ，使得 $\triangle BCP$ 与 $\triangle OAB$ 相似？若存在，请直接写出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由。

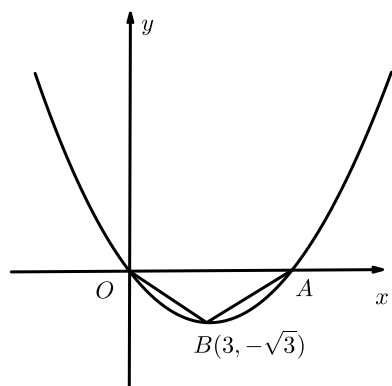
练习

18. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2$ 平移后经过 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，设平移后的抛物线与 y 轴交于点 C ，其顶点为 D 。



- (1) 求平移后的抛物线解析式和点 D 的坐标。
- (2) 求证： $\angle CAD = \angle OCB$ 。
- (3) 在 x 轴上是否存在点 E ，使得 $\triangle ACE$ 与 $\triangle OCD$ 相似？若存在，求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由。

19. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象经过原点 O ，交 x 轴于点 A ，其顶点 B 的坐标为 $(3, -\sqrt{3})$ 。



- (1) 求该抛物线的函数关系式及点 A 的坐标 .
- (2) 在抛物线上是否存在点 Q ，使 $\triangle QAO$ 与 $\triangle OAB$ 相似？如果存在，求出点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由 .

20. 如图，已知抛物线的方程 $C_1: y = -\frac{1}{m}(x+2)(x-m)$ ($m > 0$) 与 x 轴相交于点 B 、 C ，与 y 轴相交于点 E ，且点 B 在点 C 的左侧．在第四象限内，抛物线 C_1 上是否存在点 F ，使得以点 B 、 C 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle BCE$ 相似？若存在，求 m 的值；若不存在，请说明理由．

